Роль математики в современном мире

Академик Олег Фиговский.

Между духом и материей посредничает математика. (Хуго Штейнхаус)

- **Разве ты не заметил, что способный к математике изощрен во всех науках в природе? (Платон)**

Анна Веклич, специалист по стратегическим коммуникациями в сфере образования и науки и Андрей Михайлович Райгородский, директор Физтех-школы прикладной математики и информатики МФТИ обсуждали роль математики в современном мире. Когда человек понимает зачем нужна математика, он становится более образованным в современном мире. Математика в каком-то смысле гуманитарный предмет. А чистая математика это настоящее искусство! Во большинстве университетов мира работы в области математики докторантам присуждают степени Doctor Art. Международный день математики отмечается более чем в 70 странах с проведением более чем 410 мероприятий. Одрэ Азуле, Генеральный директор ЮНЕСКО отмечает, что математика с её множеством технических применений сейчас лежит в основе всех сфер нашей жизни. Наряду с алгоритмами, математика играет ключевую роль в технологиях искусственного интеллекта и технологических сбоях - и, по мере того как мы сталкиваемся с глобальными проблемами, такими как пандемия COVID-19 и изменение климата, мы помним о важной роли математики в решении задач нашего времени. Так поговорим о некоторых новых разработках в этой области.

Новый математический аппарат может кардинально упростить исследования в медицине, нефтехимии и пищевой промышленности. Его масштаб сравним с фундаментальными работами Смолуховского и Эйнштейна по теории диффузии и броуновского движения. Специалисты Бристольского университета (Англия) предложили новое математическое описание движения веществ сквозь проницаемые материалы. С его помощью можно с высокой точностью моделировать распространение препаратов в живых тканях, движение газа и нефти в породах, устойчивость пищевой упаковки к проникновению инфекций и загрязнений. Диффузией называют движение атомов и молекул из области высокой концентрации микрочастиц в область низкой концентрации. Благодаря этому явлению газы и жидкости смешиваются, а твердые тела (например, металлы) при высоком давлении или долгом контакте «склеиваются» своими поверхностями. В целом, диффузия — это про то, как частицы вещества из-за броуновского (теплового) движения «толкаются» между собой и неизбежно разлетаются по всему доступному объему. Или смешиваются с частицами другого вещества.

Самый крупный вклад в современную теорию диффузии сделали Альберт Эйнштейн, Мариан Смолуховский и Жан-Батист Перрен в начале XX века. Их уравнения стали первой попыткой описать диффузию с точки зрения атомной теории строения вещества. Эти формулы уже более века используют для расчетов в области биохимии, добычи ископаемого топлива, очистки воды и промышленных стоков. Но они не описывают движение вещества в сложной среде, которая состоит из множества перегородок с разной проницаемостью. Например, распространение медицинского препарата в живой ткани с ее различными клеточными мембранами. По словам Тоби Кея, специалиста по инженерной математике и ведущего автора работы, сейчас ученым приходится моделировать движение через каждую мембрану в отдельности, а потом собирать результаты в цельную картину. Это очень сложно и требует больших вычислительных ресурсов. Новое уравнение позволяет «в один заход» моделировать диффузионное движение через среду любой сложности и любого масштаба. Причем оно с одинаковой точностью описывает как распространение нефти в геологических пластах, так и миграцию животных через преграды вроде заборов и дорог. Исследование английских математиков опирается на работу 2020 года, которую провела примерно та же команда ученых Бристольского университета. Тогда они решили 100-летнюю задачу математической физики, описав движение частицы в произвольной молекулярной решетке. Как говорит доктор Лука Джуджиоли, принявший участие в обоих исследованиях, значение той работы 2020 года до сих пор трудно оценить. Она дает очень глубокое понимание, по каким законам движется вещество на микроуровне, и таит в себе еще много ответов на самые захватывающие вопросы.

Каким образом математика соотносится с нашим физическим миром? Удивительно, как много раз нам удавалось находить математические средства для приемлемого описания мира — начиная с падающих тел и планет и заканчивая строением атома и глобальной структурой Вселенной. Но сегодня мы близки к исчерпанию запаса простоты: с разных сторон нас окружают сложные физические системы, с которыми нам трудно обращаться математически, считает известный ученый Алексей Семихатов. В математике существует теория Софуса Ли, содержащая в себе некие группы симметрий, одна из которых реализуется в нашей природе. Получается, то, что мы видим на ускорителях частиц, было предсказано математической теорией и в природе на фундаментальном уровне реализован один из списков из учебника математики. Почему это так? — Мы не знаем почему, отвечает проф. Семихатов. Но зато нам известно, что начиная с Нового времени описание мира в науке — это математическое описание. Ответа на вопрос, почему так случилось, у нас нет, но мы страшно радуемся этому факту, потому что он позволяет нам делать предсказания. Мы предсказываем наш мир на основе манипуляций с какими-то математическими объектами, уравнениями, и такое положение вещей существует еще со времен Исаака Ньютона. При этом огромную роль в устройстве мира играют симметрии. Они бывают в том числе сложными и не сводящимися ни к отражению в пространстве, ни к повороту в пространстве. Такие симметрии требуют привлечения математических структур. Огромное количество явлений мы постигаем благодаря понимаю тех или иных симметрий, управляющими этими явлениями. Прекрасный пример — кварки, составляющие ядро атома. В их предсказании огромную роль сыграли математические соображения. Сначала нам казалось, что элементарных частиц, составляющих материю, совсем немного: электрон, протон, нейтрон да нейтрино. Но затем мы начали строить ускорители, и выяснилось, что существуют не десятки и даже не одна сотня частиц, а многие сотни — целый зоопарк! Когда физики стали объединять частицы в группы по некоторым похожим свойствам, было обнаружено, что есть группы из 8, 15, 21 частицы и т.д., — в результате появился ряд чисел, выражающих размеры этих групп;

открываемые на ускорителях частицы попадали в группы по некоторым симметрийным признакам. И выяснилось, что можно было открыть учебник совершенно чистой математики, просто изучающей свойства симметрии в конкретном воплощении, называемом алгебрами Ли, или группами Ли, — и найти эти размеры там! Теория Софуса Ли, возникшая к началу XX в., сообщала нечто определенное в отношении чисел, полученных нами из эксперимента: они укладывались в некоторый ряд, которым управляет одна и та же базовая симметрия (базовые законы преобразования могут проявлять себя, действуя одним образом на группе из восьми объектов, другим — на группе из 15 и т.д.). Таким образом, стало понятно, что по неизвестным нам причинам часть мира управляется математической симметрией, имеющей техническое название SU(3), или «теория унитарной симметрии». Самое фундаментальное проявление этой симметрии — когда она управляет группой из трех объектов. Но ни одной такой «группы из трех» на ускорителях не наблюдалось! Пришлось сделать предположение, что мы по каким-то причинам просто не можем их увидеть.

Но в то время, о котором я говорю, в 1960-е гг., ученые даже не знали, существуют ли вообще кварки в природе или нет. Мы располагали только предположениями, за которыми, однако, стоял удивительный математический факт. Заключался он в том, что, исходя из того, как упомянутая симметрия SU(3) обращается с тремя фундаментальными объектами, можно было с помощью довольно сложных математических законов выяснить и то, как она действует на группах из 8, 15, 21 элемента и т.д. Таким образом, оказалось, что в каком-то смысле вся наша материя сложена из этих трех элементов: весь этот сонм частиц, которые классифицировались по симметриям SU(3), состоит из трех доселе не наблюдавшихся частиц! Их назвали кварками. В математике есть не только симметрия SU(3), о которой мы с вами говорим, но и бесконечное количество других симметрий. Мы не знаем, почему природа выбрала именно эту. От того момента, как группы Ли были сформулированы в математике, и до того момента, как они вдруг понадобились для описания кварков, прошло более полувека. Затем процесс ускорился. Ученые стали искать эти загадочные три частицы, эти кварки, ранее никем не наблюдаемые. Они нашлись внутри хорошо знакомых нам протонов и нейтронов: каждый протон и нейтрон составлен из трех кварков. Но неожиданно оказалось, что вынуть эти кварки из протонов и нейтронов невозможно. Эти объекты существуют в довольно своеобразном смысле: они живут внутри других образований (например, протона), которые нельзя разобрать на части. Нельзя вытащить оттуда один кварк, они как бы склеены между собой. Мы ведь привыкли, что разобрать можно все что угодно, достаточно просто приложить большую энергию, но здесь не так- заканчивает Алексей Семихатов.

Выражение «стадное чувство» нечасто используется в положительном смысле. Между тем в природе сплошь да рядом живые организмы, обладающие сравнительно низким индивидуальным интеллектом, объединяются в сообщества, которые ведут себя намного умнее и организованнее, чем каждый из их членов по отдельности. Это навело математиков и физиков конца XX века на мысль о применении роевого, то есть коллективного, интеллекта в нашей жизни для решения сложных задач пишет Дмитрий Васильков - Представьте себе доставщика пиццы, которому надо развезти заказы в разные точки города и затем вернуться в ресторан, откуда он выезжал. Как ему оптимально построить маршрут? Математики называют это задачей коммивояжера. Методы решения таких задач разделяют на точные и эвристические. Первые, их еще называют классическими, основаны на полном переборе всех возможных решений, что, в свою очередь, делает их неэффективными в случае большого количества переменных или точек, которые надо посетить: поиск ответа может занять много лет. Получается, что большинство практических задач комбинаторной оптимизации (например, маршрутизация грузовиков) требуют особого подхода. Эвристические методы, к которым относятся и роевые алгоритмы, производят относительно ограниченный поиск решений и находят, возможно, не лучшее, но точно близкое к нему решение за разумное время «методом проб и ошибок». Лучшие же современные алгоритмы позволяют находить решения, на 95–99% приближенные к оптимальным. В этом месте нам стоит на минуту задержаться и объяснить, каким образом мы рассчитываем эффективность таких решений.

Во-первых, для большинства задач можно получить оценку сверху (или снизу, в зависимости от задачи) для глобального оптимума, при этом не имея возможности найти сам глобальный оптимум. Например, перед нами стоит задача оптимально погрузить изделия сложной формы и большой массы в вагон — теоретический оптимум достигается при использовании 100% грузоподъемности и вагона, но не нарушатся ли при этом другие ограничения, ответить невозможно, не решив задачу оптимизации. Если роевой алгоритм находит решение, позволяющее достичь загрузки на 95% грузоподъемности, это можно считать приближенной оценкой точности алгоритма. Во-вторых, иногда мы можем узнать оптимальное значение функции, но при этом практическую ценность имеет значение аргумента, при котором функция достигнет оптимума, а найти его можно, только решив задачу оптимизации. Например: есть сложный производственный процесс с большим количеством переделов. Мы знаем, что минимальные издержки на производство партии продукции могут составить 95 рублей, но не знаем, как надо настроить оборудование и в какой последовательности обрабатывать изделия, чтобы достичь такого уровня затрат. Роевой алгоритм предлагает настройки и последовательность операций, при которых издержки составят 100 рублей. Таким образом, оценочная точность алгоритма составит 95%.

А теперь представьте, что есть организмы в животном мире, которые, конечно же, не знают, что такое математика, но бессознательно ежедневно действуют оптимально и эффективно. Жизнь некоторых из этих животных вдохновила ученых на разработку алгоритмов. Такие алгоритмы называют биоинспирированными, так как они повторяют поведение животных или природных явлений. Так, например, отдельная птица или рыба и не подозревает, что стая, в которой она живет, ведет себя как бы разумно. Каждая особь (в алгоритме — частица) меняет свою позицию в пространстве, ориентируясь на свой опыт и на положение соседей. Это помогает птицам не сталкиваться друг с другом и лететь по оптимальному маршруту к нужному месту.Такое системное поведение животных иллюстрирует понятие «автосинхронизации», или «закона пяти процентов», встречающееся, в том числе, и в мире людей. Если в каком-то обществе 5% участников одновременно совершают определенное действие, например начинают аплодировать артистам на сцене, то остальные люди автоматически начинают делать то же самое: сначала порознь, а потом и синхронно. Похожим образом работает и муравьиный алгоритм: отдельный муравей будет очень долго искать оптимальный путь от еды или строительных материалов до дома. Но группа муравьев, объединенных в колонию, быстро находит наилучшее решение. Секрет заключается в феромонах, которые выделяют эти насекомые. Чем путь туда-обратно быстрее, тем больше по нему пробежит муравьев и тем сильнее будет запах внешней секреции, который как бы сигнализирует: «Следуй за мной».

Однако к эвристическим алгоритмам относят не только роевые. Некоторые из них были вдохновлены строгой иерархией в животном мире, то есть вертикальными связями, а не горизонтальными, как в случае роя. Например, в пчелином мире есть разведчики, которые первыми отправляются на поиски нектара вокруг улья и передают координаты на базу. Чем больше предполагается найти на лужайке нужных цветов, тем дольше и ярче танец пчелы. Остальные жители улья, если информация их удовлетворяет, отправляются уже на сбор нектара. Разведчики же улетают искать другие поляны, причем радиус поиска с каждым заходом увеличивается. Поиск останавливается, когда пчелы находят наилучшую по всем параметрам локацию или оптимальное решение, если мы говорим о пчелином алгоритме. Похожих предводителей-агентов содержит и алгоритм серых волков, разработанный в 2014 году. В дикой природе в стае существует довольно четкая иерархия и распределение обязанностей, которое непосредственно влияет на охотничье поведение хищников. Это и легло в основу алгоритма. При поиске добычи (оптимального решения) волками предполагается, что альфа-самец (лучший кандидат) и бета-волки имеют более четкое и правильное представление о том месте, где может находиться добыча. Соответственно, оставшаяся часть стаи корректирует свое поведение и локацию в зависимости от позиции лучших поисковых агентов.

Выбор нужного алгоритма зависит от поставленной задачи, и универсального рецепта здесь нет. Теорема о бесплатном обеде (NFL), например, утверждает: если алгоритм хорошо работает с определенным классом задач, то это обязательно балансируется снижением производительности на множестве оставшихся проблем. Более того, надо брать во внимание вычислительные затраты, доступность программного обеспечения и время, отведенное на поиск решения, чтобы правильно выбрать алгоритм. Но даже в этом случае алгоритм не гарантирует, что вы нашли самое лучшее решение, которое по-научному называют еще глобальным оптимумом. Всегда искать глобальный оптимум за разумное время сможет, в теории, только квантовый компьютер. Несмотря на то что небольшие квантовые процессоры уже существуют, они не могут пока справиться с большим объемом переменных, а все практические задачи, как назло, именно такие. Если бы у нас уже был достаточно мощный квантовый компьютер, мы могли бы с его помощью быстро и точно решать гораздо более масштабные и сложные задачи оптимизации, но его пока нет. Однако в нашем распоряжении есть эвристические алгоритмы, которые успешно применяются на обычных машинах. Более того, даже в этом случае мы уже можем использовать явления из квантовой физики в природных алгоритмах. Так, например, квантово-вдохновленный алгоритм роя частиц использует эффект туннелирования для преодоления высоких барьеров.

Для наглядности представьте, что вы играете в такой боулинг, где кегли расставлены за холмом. При этом ваших сил не хватает, чтобы шар перекатился через вершину и оказался на той стороне. Выход в нашем мире только один — не играть в такой странный боулинг. В квантовом же мире умный в гору не идет, а туннелирует ее. Когда полной энергии не хватает, чтобы просто забраться на гору, частицы проходят ее насквозь. Это противоречит законам классической механики и показывает квантовую природу явления, которую и используют современные алгоритмы. Эффект ускоряет вычислительный процесс и помогает не застрять в локальном оптимуме при поиске глобального. Квантово-вдохновленные (quantum-inspired) алгоритмы применяют в фармакологии, промышленности, логистике, финансовой сфере и в поиске материалов. То есть везде, где можно оптимизировать путь, расписание или какой-то процесс. Пока считается, что quantum-inspired алгоритмы дают максимальный экономический эффект. Однако нет предела совершенству, и, хотя коммивояжер, выходя из дома на работу, уже может не ломать голову над маршрутом (по крайней мере, на 95–99%), остается еще много нерешенных задач оптимизации из разных областей науки, бизнеса и повседневной жизни, которые только предстоит решить с помощью квантово-вдохновленных алгоритмов.

Объявлены лауреаты математической Филдсовской премии. Награды получили украинка Марина Вязовская, британец Джеймс Мейнард, француз Уго Дюминиль-Копен и выпускник Сеульского университета Джун Ха. На этот раз Международный математический союз решил отметить специалистов по многомерным пространствам, теории простых чисел, комбинаторике и статистической физике. Филдсовская премия считается самой престижной мировой наградой в математике. Ее вручают на протяжении почти века, с 1936 года, на Международном конгрессе математиков, который проходит раз в четыре года. На этот раз Филдсовскую премию получила украинка Марина Вязовская, став второй женщиной-лауреатом в истории (первой была Мариам Мирзахани в 2014-м). Награда стала ожидаемой и заслуженной. В 2016 году Вязовская смогла решить задачу, над которой математическое сообщество билось многие десятилетия.Задача по идее проста. В привычных нам двумерном (на бумаге) и трехмерном мире ее может решить любой: как максимально плотно заполнить лист бумаги идентичными кругами, а коробку — шарами. На бумаге рисунок будет напоминать соты, в реальности — пирамиду апельсинов в супермаркете. Математики давно доказали, что это действительно самый плотный способ заполнить пространство. Сложности возникли с другими измерениями.

В математике недостаточно показать, что решение подходит, нужно доказать, что нет решения лучше. С этим были проблемы, а Марине Вязовской удалось найти решения. Она получила премию «за доказательство того, что решетка E8 позволяет максимально плотно упаковать идентичные сферы в восьмимерном пространстве, а также за дальнейший вклад в родственные задачи интерполяции и поиска экстремумов в Фурье-анализе». Сегодня Вязовская продолжает работу в Федеральной политехнической школе Лозанны

(Швейцария), которую часто называют «европейским MIT». Ее работа чисто теоретическая и пока не имеет прикладного значения. Но Вязовская надеется, что ее формулам найдется применение в дифференциальном анализе и обработке сигналов. Вторым лауреатом стал британец Джеймс Мейнард (James Maynard) — специалист по простым числам и интервалам между ними. Мировое математическое сообщество заметило его в 2013 году, когда Джеймс пережил одновременно лучшее и худшее, что только может произойти с математиком. Молодой парень, недавно окончивший университет, нашел решение одной из древнейших задач об интервалах между простыми числами. Вот только всего за несколько месяцев до него эту задачу уже решил другой ученый, хотя не таким методом. И все же Мейнард продолжил заниматься простыми числами, которые считает «фундаментальными кирпичиками всех целых чисел — самых естественных и базовых объектов во Вселенной». Его достижения не остались незамеченными. Джеймс Мейнард, теперь профессор Оксфордского университета, получил награду «за вклад в аналитическую теорию чисел, который привел к значительному прогрессу в нашем понимании структуры простых чисел и в диофантовом приближении».

Третьим победителем стал кореец американского происхождения Джун Ха (June Huh), который «строит пространства из комбинаторных объектов». «Как только у вас есть пространство для движения, вы можете воспользоваться своей геометрической интуицией и добыть информацию, скрытую в оригинальной комбинаторной структуре», — объясняет он свою работу. Такой геометрический подход совершил революцию в его сфере исследований, а ведь, в отличие от других лауреатов, Ха не собирался становиться математиком. В молодости Джун Ха мечтал стать поэтом, чтобы «выражать невыразимое», и даже бросил школу в старших классах. Но поэзия требовала самоанализа, а Джун хотел описывать внешний мир. Даже в университете он чувствовал себя потерянным, однако на последнем курсе попал на лекции японского математика Хэйсукэ Хиронака (Heisuke Hironaka), лауреата Филдсовской премии 1970 года. Впервые Ха увидел «сырую» математику вместо «вылизанных» за века доказательств из учебников. Он нашел свое призвание. И коллеги говорят, что в том, как уникально Джун подходит к решению задач, есть нечто очевидно поэтическое.Джун Ха получил награду «за перенос идей теории Ходжа в комбинаторику, доказательство гипотезы Доулинга — Уилсона для геометрических решеток, доказательство гипотезы Герона — Роты — Уэлша для матриоидов, развития тероии лоренцовых полиномиалов и доказательство сильной гипотезы Мейсона».

Последним победителем стал француз Уго Дюминиль-Копен (Hugo Duminil-Copin), совершивший большой вклад в теорию фазовых переходов. Он работает на стыке физики и математики — в статистической физике. Статистическая физика ищет общие свойства огромных систем через анализ взаимодействий между их малейшими составляющими. Чтобы понять всю сложность этой задачи, представьте фонтан, капельки которого под действием ветра разлетаются в разные стороны. Вы не сможете отследить движение каждой капельки, но можете выявить закономерности — вероятности движения. Дюминиль-Копен изучает такие же закономерности, только в магнетизме. Применив теорию просачивания (по-научному — теорию перколяции), им с коллегами удалось разработать новую модель для описания таких процессов. Филдсовскую премию он получил «за решение устоявшихся проблем в вероятностной теории фазовых переходов в статистической физике, особенно в трехмерном и четырехмерном пространстве». Сейчас Дюминиль-Копен продолжает работу над разработкой простой и универсальной теории просачивания. У Филдсовской премии есть несколько важных отличий от Нобелевской премии и математической Абелевской премии. Во-первых, награду вручают за общий вклад в математику, а не за конкретные достижения. Во-вторых, лауреатами становятся только ученые в возрасте до 40 лет. Так пожелал ее основатель Джон Филдс, который считал, что премия «должна служить поощрением к дальнейшим достижениям».

Новая работа может помочь понять, как и почему возникают эти микроскопические квантово-механические пульсации, а также объяснить связи между теорией гравитации Эйнштейна и квантовой механикой — того, что ускользало от ученых на протяжении десятилетий. Грандиозная задача современной теоретической физики в том, чтобы найти «единую теорию», которая могла бы описать все законы природы в единой структуре, соединяющую общую теорию относительности Эйнштейна, описывающую Вселенную в больших масштабах, и квантовую механику, описывающую наш мир на атомарном уровне. Теория «квантовой гравитации» должна включать в себя как макроскопическое, так и микроскопическое описание природы. Черная дыра образуется в тот момент, когда тяжелая звезда расширяется и коллапсирует под действием собственной гравитационной силы, так что вся ее масса оказывается сосредоточенной в чрезвычайно малом объеме. Квантово-механическое описание черных дыр все еще находится в зачаточном состоянии и требует помощи высшей математики.

«Мы стремимся понять законы природы — и язык, на котором они написаны, является математика. Именно в ней мы находим ответы на вопросы, которые мы ищем в физике. Это взаимодействие особенно заметно в поисках квантовых гравитация — где крайне сложно проводить эксперименты», — объяснил Дэниел Перссон, профессор кафедры математических наук Технологического университета Чалмерса. «Задача состоит в том, чтобы описать, возникновение гравитации как “эмерджентного” явления. Так же, как повседневные явления возникают из хаотических движений отдельных капель, мы хотим описать, как гравитация возникает из квантово-механической системы в момент времени на микроскопическом уровне», — рассказал Роберт Берман, профессор кафедры математических наук Технологического университета Чалмерса. Перссон и Берман вместе с Тристаном Коллинзом из Массачусетского технологического института в США показали, как гравитация возникает из специальной квантово-механической системы в упрощенной модели квантовой гравитации, называемой голографическим принципом.

«Используя методы математики, которые я исследовал ранее, нам удалось сформулировать объяснение того, как гравитация возникает в соответствии с голографическим принципом, более точным образом, чем это делалось ранее», — добавил Берман. Исследование ученых предлагает новое понимание темной энергии. В общей теории относительности Эйнштейна гравитация описывается как геометрическое явление. Подобно тому, как только что застеленная кровать изгибается под тяжестью человека, тяжелые предметы могут искривлять геометрическую форму вселенной. Но, согласно теории Эйнштейна, даже пустое пространство — «вакуумное состояние» Вселенной — имеет богатую геометрическую структуру. Если бы мы могли увеличить масштаб и посмотреть на этот вакуум на микроскопическом уровне, мы бы увидели квантово-механические флуктуации или пульсации, известные как темная энергия. Именно эта загадочная форма энергии, с более широкой точки зрения, ответственна за ускоренное расширение Вселенной. «Наши результаты открывают возможность проверить другие аспекты голографического принципа — например, микроскопическое описание черных дыр», — подытожил Даниэль Перссон.

Математики сообщили о нахождении квантового квадрата Эйлера шестого порядка, у которого не существует классического аналога. Полученное решение оказалось эквивалентно максимально запутанному состоянию четырех квантовых игральных костей, которое невозможно было бы обнаружить традиционными методами. Результат работы поможет улучшить методы коррекции ошибок при квантовых вычислениях.

Латинским квадратом называют квадратную матрицу, заполненную элементами некоторого счетного множества таким образом, чтобы в каждой ее строке и каждом столбце каждый элемент множества встречался только один раз. Наиболее известным латинским квадратом можно назвать квадрат 3×3, который необходимо заполнить натуральными числами, играя в судоку. Латинские квадраты нашли применение в комбинаторике, статистике, криптографии и многих других научных разделах.

Их можно усложнить, помещая в ячейки элементы не одного, а двух различных множеств (в этом случае еще говорят про пару ортогональных латинских квадратов). Такие объекты носят название греко-латинских квадратов или квадратов Эйлера в честь знаменитого математика, который активно их изучал. Для небольших размерностей такие структуры можно представить с помощью игральных карт, которые следует разместить таким образом, чтобы все масти и карты всех достоинств встречались в каждой строке и в каждом столбце ровно один раз.

Эйлер не нашел греко-латинских квадратов 2×2 и 6×6, но смог построить их для 3, 4 и 5 порядков. Он также высказал гипотезу, согласно которой не существует таких квадратов порядка N=4n+2, где n — натуральное число. Для квадратов 6×6 эту гипотезу аналитически подтвердил Терри в 1901 году, однако спустя почти 60 лет с помощью компьютеров были найдены греко-латинские квадраты 10 и 22 порядков, что опровергло предположение Эйлера. Теория латинских квадратов снова заинтересовала математиков в связи с распространением квантовой информатики. В квантовых вариантах квадратов в ячейках расположены не отдельные элементы множеств, а вектора гильбертовых пространств, описывающие их квантовую суперпозицию. В этом случае условие неравенства всех членов ряда или строки заменяется на условие ортогональности всех векторов. На базе этой идеи недавно была предложена квантовая версия судоку. Группа математиков из Индии и Польши при участии Кароля Жичковского (Karol Życzkowski) продолжила работу в этом направлении и получили решение для квантового эйлерового квадрата 6×6.

Математик из РУДН разработал матричный способ представления функций множества. Такой подход упростит процесс расчетов и их проверку, а результаты исследования могут быть использованы как инструмент для работы с кооперативной теорией игр. Кооперативная теория игр разбирается с поиском способов принятия сложных решений в ситуации с большим количеством критериев. Группы игроков, или коалиции, вырабатывают решение, которое принесет наибольшую выгоду. Один из инструментов для работы с этой теорией — функции множества, входные данные которых представлены как набор элементов. Эти элементы (множества) могут принимать разные значения. Данные по отдельным элементам могут подкреплять друг друга или нейтрализовать, поэтому сочетания разных элементов — коалиции могут принимать свои значения. Для работы с такими данными необходим понятный математический язык. «Мы внесли вклад в развитие математического языка кооперативной теории игр, опираясь на такие знакомые понятия, как матрицы и векторы. Мы разработали формальный подход для манипуляций с функциями множества на основе линейной алгебры. Практическое применение этих результатов лежит в области многокритериального анализа решений, принятия групповых решений, операций с зависимыми целями, экономических теорий, основанных на кооперативных играх, теорий агрегатных функций», — пояснил кандидат физико-математических наук, профессор РУДН Глеб Беляков.

Математик нашел единый подход, понятный для математиков, инженеров, информатиков и экономистов. Для этого идеально подошли операции линейной алгебры, которые опираются на матрицы. Матричные выражения были получены при использовании производной функции множества. Обработка показательного множества упрощает методы расчета и способствует эффективной программной реализации многих формул. Ученый уже предложил новые формулы для поиска вектора Шепли. «Функции множеств находят свое применение в экономике, в области принятий решений, нечеткой логике и исследованиях операций. Показательное множество, в частности, хорошо подходит для моделирования между входными переменными в корпоративных играх. Разработанный аппарат упростит расчеты, а также облегчит программную реализацию многих формул с использованием существующих пакетов линейной алгебры», — резюмировал Глеб Беляков.

Ученые нашли точное решение для класса сложных инженерных задач, впервые использовав соотношение ортогональности Папковича вместо обычно применяемого интегрального преобразования Фурье. Чтобы избежать трещин, деформаций и разрушения элементов сложных конструкций, инженерам необходимо учитывать то, как объект поведет себя при нагрузке. Это, в свою очередь, требует сложнейших математических расчетов при проектировании. Один из открытых вопросов инженерии связан с решением прикладных задач для того случая, когда нагрузка приложена не на границах, а внутри области. Такие случаи называются неоднородными краевыми задачами теории упругости. В них нужно найти точные решения неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных, удовлетворяющие тем или иным условиям на границе области. Одна из таких задач — передача нагрузки от упругого элемента, расположенного внутри области, к тонкому листу. На практике она реализуется, например, при взаимодействии стрингера (продольный элемент каркаса) самолета и его обшивки.

«В 60–80 годы прошлого столетия этим задачам уделялось огромное внимание многих выдающихся ученых, но сейчас их работы в значительной степени забыты. Отчасти это связано с тем, что формулы, описывающие решение, достаточно сложны и требуют от исследователя значительных математических навыков. Вторая и главная причина состоит в том, что все решения были приближенными — рассказывает руководитель проекта по гранту РНФ Александр Кержаев, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН. Ученые из Института теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН (Москва) предложили метод построения точных решений неоднородных задач теории упругости в полуполосе. С точки зрения инженерии, полуполосой является прямоугольник, у которого длина значительно больше ширины — например, достаточно длинная бетонная балка. Закрепим эту балку горизонтально, полагая, что внутри нее действует массовая нагрузка, передаваемая к ней через металлический каркас. Концы этой балки могут быть, например, свободными или жестко закрепленными. Для безопасности и долговечности конструкции необходимо знать, как внутри нее распределяются напряжения. Точное решение этой задачи всегда представляло большой прикладной и теоретический интерес.

Предложенный учеными метод построения состоял в следующем: вначале они решили неоднородную задачу для бесконечной полосы, впервые применив для этого соотношение ортогональности Папковича. Затем к нему добавили соответствующее решение однородной задачи для полуполосы (полученное авторами ранее), с помощью которого удовлетворяются граничные условия на торце. Использование соотношения ортогональности вместо классического способа — интегрального преобразования Фурье — быстро приводит к цели. Полученное решение является точным, так как коэффициенты разложений в ряды по собственным функциям Папковича–Фадля определяются в явном виде. Это решение базируется на принципиально новом математическом аппарате, разработанном авторами в предыдущих работах. Ученые продемонстрировали метод на примерах точных решений двух неоднородных краевых задач теории упругости для полуполосы со свободными длинными сторонами. В первом случае торец полуполосы свободен, а во втором он жестко защемлен. «Соотношение ортогональности Папковича остается справедливым и для других типов однородных граничных условий на сторонах полосы, в частности, когда ее стороны жестко защемлены. Поэтому данным методом можно находить простые точные решения для широкого круга неоднородных краевых задач в полосе с различными однородными граничными условиями на ее длинных сторонах. Эти решения также будут представляться рядами по собственным функциям Папковича–Фадля», — прокомментировал Александр Кержаев. Исследования проводились совместно с коллегой из Технологического университета Циндао (Китай).

Ученые утверждают, что теория графов помогает биологам изучать гомеостаз. Здоровые человеческие тела хорошо справляются с регулированием: наша температура остается на уровне 98,6 градусов по Фаренгейту, независимо от того, насколько высока или низка температура вокруг нас. Уровень сахара в крови остается довольно постоянным, даже когда мы выпиваем стакан сока. Мы удерживаем необходимое количество кальция в костях и в других частях нашего тела.

Мы не смогли бы выжить без этого регулирования, называемого гомеостазом. А когда системы выходят из строя, происходит болезнь, а иногда смерть. В презентациях на ежегодном собрании Американской ассоциации содействия развитию науки исследователи утверждали, что математика может помочь объяснить и предсказать эти сбои, потенциально предлагая новые способы для предотвращения и лечения в ситуациях, когда что-то идет не так. Гомеостаз «является биологическим явлением, и без него биологические системы не работают, – сказал Марти Голубицкий, один из докладчиков и выдающийся профессор естественных и математических наук в Университете штата Огайо. – И, если бы у вас были подробные, точные математические модели, вы могли бы численно исследовать эти системы, найти места, где этот контроль действительно происходит, а где есть сбой, и понять, как это исправить». Ученые хорошо разбираются в биологических причинах, по которым происходит это регулирование: определенные системы в наших телах должны оставаться постоянными, чтобы функционировать и поддерживать наши тела. Однако математика, лежащая в основе этого, менее достоверна. Но понимание гомеостаза, в том числе прогнозирование его изменений и расчет способов поддержания тела в регуляции, несмотря на сбои в системах организма, которые управляют этими регуляторами, может быть способом оказания целевой медицинской помощи людям, которые в ней нуждаются, сказала Джанет Бест профессор математики в штате Огайо.

«Это часть точной медицины, – сказал Бест, который также является со-директором Института математических биологических наук штата Огайо. Люди разные, и вам нужна модель, которая может работать с разными людьми. И мы думаем, что это то, что мы здесь разработали». Исследователи из MBI и других институтов, изучающие взаимосвязь математики и биологии, построили модели, объясняющие, как организм поддерживает гомеостаз в различных системах. В основе этих моделей лежит граф – математическая концепция, которая пытается объяснить, как объекты связаны друг с другом. (Если вы изучали алгебру или геометрию в средней школе, вы, вероятно, выучили некоторые основы теории графов.) Голубицкий и Бест сказали, что теория графов может помочь объяснить и предсказать изменения гомеостаза в организме. По их словам, это объяснение может быть полезно биологам и другим специалистам, ищущим способы вмешательства в случае нарушения гомеостаза. Этот распад вызывает ряд проблем – например, может выражаться переизбытком глюкозы в крови человека или недостаточным количеством кальция в его костях.

Презентации AAAS были сосредоточены как на графике, который моделирует, как организм регулирует уровень дофамина посредством гомеостаза, так и на том, как теория графов помогает определить свойства графиков, которые могут помочь предсказать гомеостаз. Голубицкий и Бест описали, как дофамин и ферменты, которые его расщепляют, могут быть представлены в виде математической формулы, связанной с графиком. Они показали, что, вычисляя изменения в узлах, можно рассчитать или предсказать изменения в уровнях дофамина. По словам Голубицкого, этот подход может быть распространен на другие системы, хотя для уверенности необходимы дальнейшие исследования. По его словам, это исследование уже ведется. «Гомеостаз – достаточно важная область биологии, и если математика может что-то сделать для него, то это успех», – сказал он.

Ученые исследовали новый способ решения проблемы малого числа кубитов квантовых вычислителей для решения реальных оптимизационных задач. Они пошли не по пути увеличения мощности компьютеров, а решили подстраивать формулировки решаемых ими задачи в нужном направлении. Исследователи показали, как квантовый компьютер может справиться с разными вариациями задачи маршрутизации транспорта. Одними из самых сложных с точки зрения классических вычислителей и наиболее перспективными с точки зрения квантовых можно назвать задачи, принадлежащие классу квадратичной неограниченной бинарной оптимизации (QUBO, quadratic unbounded binary optimization). Но важнее всего то, что эти оптимизационные задачи встречаются в реальной жизни — от экономики и финансов до машинного обучения. Поэтому их исследование и развитие возможностей квантовых вычислений для решения может принести видимую пользу. Переменные в таких задачах могут принимать значения 0 или 1 (бинарные), а цель задачи — оптимизация какой-нибудь заданной функции. Обычно, нужно что-то минимизировать (например, время, расходы, расстояние) или максимизировать (прибыль, заполнение рюкзака) и при этом соблюдать необходимые условия. Один из старейших примеров оптимизационной задачи — задача коммивояжера.

Коммивояжер выезжает из своего города, направляется по делам в разные города и хочет знать оптимальный маршрут для того, чтобы попасть в каждый город и вернуться обратно выгоднее всего. Критериями выгодности могут быть время, расстояние, стоимость поездки или все вместе. Если перевести задачу на математический язык, то получится граф, вершины которого — города, грани — дороги между ними, а их веса могут быть расстоянием между городами, стоимостью билета или прибылью, которую можно получить в городе. Чем больше городов, тем больше вариантов путей есть у коммивояжера. Для 4 городов помимо города старта число вариантов обхода составит 4! = 24, а для 10 уже 10! = 3628800. Но это еще не самое страшное, потому что из-за наличия условий на путешествие коммивояжера, вероятность того, что найдется хоть какое-то решение, оказывается очень маленькой. Для решения задачи нужно не просто какое-то, но оптимальное решение, поэтому перебор вариантов на классическом компьютере оказывается долгим и неэффективным.

Интересным остается вопрос о том, как в это все вписать квантовые компьютеры. Дело в том, что даже для решения оптимизационной задачи в классическом мире нужно сформулировать ее математически — перевести все условия в формулы и сформулировать целевую функцию, которую необходимо минимизировать (или максимизировать). Квантовые вычислители умеют работать с гамильтонианами, поэтому перед их запуском нужно перевести условие задачи с классического языка на квантовый. Расширенным и прикладным вариантом задачи коммивояжера можно считать задачу маршрутизации транспорта. Именно для нее исследователи из ExxonMobil и IBM Quantum под руководством Донни Гринбера (Donny Greenberg) сформулировали разные варианты постановки задачи, перевели их на квантовый язык и показали, как квантовый вычислитель сможет их решить.

Две команды исследователей нашли разные способы обсчёта нелинейных систем на квантовых компьютерах посредством их маскировки под линейные. Иногда компьютерам просто предсказать будущее. Простой процесс, типа течения сока растения по древесному стволу, довольно просто реализовать в несколько строк кода при помощи того, что математики называют линейными дифференциальными уравнениями. Однако в нелинейных системах взаимодействия влияют сами на себя: воздух, обтекающий крылья самолёта, влияет на взаимодействие молекул, которое влияет на поток воздуха, и так далее. Петля обратной связи порождает хаос, при котором малое изменение начальных условий приводит к радикальному изменению поведения впоследствии, из-за чего предсказать поведение системы практически невозможно – какой бы мощный компьютер вы бы ни использовали. «В частности, поэтому сложно предсказывать погоду или изучать сложные течения жидкости, — сказал Эндрю Чайлдс, исследователь в области квантовой информации из Мэрилендского университета. – Можно было бы решать очень сложные вычислительные задачи, если бы получилось разобраться в этой нелинейной динамике». Возможно, вскоре это получится. В ноябре 2020 года две команды независимо опубликовали свои исследования (одна – из MIT, другая под руководством Чайлдса), описывающие мощные инструменты, которые должны улучшить качество моделирования нелинейных динамических процессах на квантовых компьютерах.

Квантовые компьютеры пользуются квантовыми явлениями, выполняя некоторые типы вычислений эффективнее классических компьютеров. Благодаря этому они уже научились экспоненциально быстрее решать сложные линейные дифференциальные уравнения. И исследователи давно надеялись, что им удастся при помощи хитроумных квантовых алгоритмов сходным образом укротить и нелинейные проблемы. Новые подходы скрывают нелинейность уравнений под маской более удобоваримого набора из линейных аппроксимаций. При этом подходы между собой серьёзно различаются. В итоге, у исследователей теперь есть два разных способа подступиться к нелинейным задачам при помощи квантовых компьютеров. «Интересно, что две эти работы обнаружили подход, в котором, с учётом некоторых предположений, можно придумать эффективный алгоритм, — сказала Мария Киферова, исследователь квантовых вычислений из Сиднейского технологического университета, не связанная с этими работами. – Это очень интересно, и обе команды используют очень клёвые техники». Когда мы учился в институте, то очень не любили философию. Дело не только в том, что тогда это была *марсистко-ленинская* философия - просто мы не видели смысла в этом бессмысленном нагромождении слов. Уже много позже мы обнаружили, что увлекаюсь именно философией - но философией науки. У философии должен быть конкретный объект рассмотрения: бесконечности в теории множеств, трансфинитные числа, теории и доказуемость, гипотеза математической вселенной Макса Тегмарка. И тогда есть реальный прогресс (например, теорема Геделя), а слова просто облегают каркас, задаваемый конкретикой. Иначе получается попытка построит конструкцию из жидкой манной каши, какой-то интеллектуальный онанизм.Георг Кантор, положивший начало теории множеств и открывший разницу типов мощностей (по-английски cardinalities), на мой взгляд, куда больший философ, чем Кант и Гегель. Вы можете не вынимать ложечку из чашки кофе, когда пьете его и съедать яблоко с огрызком, но знать отличие счетного множества от континуума обязаны, если вы связаны с IT или любой технической сферой.

Одной из интересных в философском плане вещей является знаменитая (в узких кругах)